VI ТАРАУ. ТҰТАС ОРТАНЫҢ КЛАССИКАЛЫҚ МОДЕЛЬДЕРІ

Массаның, қозғалыс мөлшерінің, қозғалыс мөлшерінің моменті және энергияның сақталу заңдары тұтас орта үшін табылған заңдар, постулаттар түрінде беріледі, олардың салдарлары үздіксіздіктің, қозғалыс мөлшерінің, қозғалыс мөлшерінің моменті және жылу ағынының дифференциалдық теңдеулері болып табылады. Бұл теңдеулер барлық тұтас ортаның кез келген үздіксіз қозғалысы үшін орындалады.

Тәжірибеден белгілі, әртүрлі нақты орталар сыртқы шарттары бірдей болған жағдайда өздерін әрқалай көрсетеді. Бұл – жалпы теңдеулер, тиісті бастапқы және шекаралық шарттарды қосқанның өзінде нақты тұтас ортаның қозғалысын сипаттауға жеткіліксіз. Теңдеулер саны, оларға енетін белгісіз функциялар санынан аз, яғни теңдеулер жүйесі тұйықталмаған. Бұл жағдай, нақты жағдай, себебі жалпы теңдеулер әр ортаның нақты өзіндік ерекшеліктері туралы мәліметтерді бермейді.

Тұтас орта механикасының есептерін шешу үшін, қосымша жеке постулаттарды қабылдап дифференциалдық теңдеулердің тұйық жүйесін құру қажет. Бұл теңдеулерге ортаның кернеулі және деформацияланған күйлерін анықтайтын өзара байланыстыра алатын теңдеулер, сол сияқты күй теңдеуі де жатады.

Жоғарыда айтылған постулаттар жиынтығы осы ортаның дифференциалдық теңдеулерін тұйық жүйеге әкеліп, ортаның моделін анықтайды. Басқа сөзбен айтқанда, теңдеулердің тұйық жүйесін құру – зерттейтін ортаның математикалық моделін жасауды қажет етеді.

Тұтас ортаның жаңа модельдерін құру – механиканың қажетті бөлімі – реология арқылы жүзеге асады. Жаңа модельдерді құру материалдардың қасиеттерін тәжірибелік зерттеумен байланысты. Бұл жағдайда механика мен физиканың жалпы белгілі принциптерін, мысалы, термодинамикалық арақатынастарды пайдалану қажет. Вариациялық әдістерді қолдану да пайдалы болмақ.

6.1. Сұйық (газ тәріздес) тұтас орта

Егер деформацияның күйі e_{ij} деформация жылдамдықтарының тензорымен сипатталатын болса және кернеу тензоры P^{ij} әрбір нүктеде және әрбір уақыт мерзімінде деформация жылдамдықтарының тензоры e_{ij} арқылы анықталған, бір мәнді функциясы болып табылса, ондай тұтас ортаны сұйық (газ) деп атайды. Яғни, сұйық (газ тәріздес) тұтас орта үшін кернеу тензорының түрі мынадай болады

$$P^{ij} = P^{ij}\left(e_{ij}, M, \alpha_{ik}, \mu^{i}\right) \qquad (6.1)$$

мұндағы $M(x^{i})$ – ортадағы қарастырылып отырған нүктелер, μ^{i} – скаляр термодинамикалық параметрлер, α_{ik} – анизотроптылықты сипаттайтын тензорлық параметрлер.

Сұйықтың (газдың) бұл ұғымы, кәдімгі сұйықтар мен газдарды түсіндіру үшін жақсы схема болып табылады, себебі тәжірибе көрсеткендей олар өздерінің бөлшектерінің орын ауыстыруына тәуелсіз. Солай бола тұра сұйықтар мен газдар пішіні жағынан үлкен деформацияларға ұшырайды. Екінші жағынан деформация болып жатқан кезде, сұйықтың деформация жылдамдығына белгілі бір тәуелділігі байқалынады.

Біртектілік, сызықтық және изотроптық гипотезаларын қанағаттандыратын сұйықтарды (газдарды) **классикалық (ньютондық) сұйықтар (газдар)** деп атайды.

(6.1) өрнек ортаның барлық бөлшектері үшін бірдей орындалса, онда орта біртекті деп аталынады.

Математикалық жағынан бұл шарт (6.1) теңдігінің оң бөлігі M - нүктесіне тәуелсіз болуын талап етеді, яғни

$$P^{ij} = P^{ij}\left(e_{ij}, \alpha_{ik}, \mu^{i}\right).$$

Изотропты орта дегеніміз, ортаның механикалық, физикалық қасиеттерінің кез келген бағыттар бойымен тең ықтималды болуы, ал математикалық жағынан анықтауыш теңдеуде анизотроптылықты сипаттайтын α_{ik} параметрлік тензоры болмайды

$$P^{ij} = P^{ij}\left(e_{ij}, \mu^{i}\right),$$

яғни кернеу тензоры тек қана деформация жылдамдықтары тензорының функциясы болып табылады. Изотропты тензорлық функцияның қасиеті бойынша бұл формуланы квадраттық үш мүше ретінде көрсетуге болады

$$P^{ij} \approx c_o g^{ij} + c_1 e_{ij} + c_2 e_{ij}^2,$$

c_0, c_1, c_2 коэффициенттері e_{ij} тензорының негізгі инварианттарына $J_1^{**}, J_2^{**}, J_3^{**}$ және μ^{i} скаляр параметріне тәуелді. Сонымен, кернеу тензорының компоненттері жылдамдықтар тензорының компоненттерінен сызықты тәуелділікте болғандықтан сызықты функциямен өрнектеледі. Бұл шарт изотропты тұтқыр сұйық үшін кез келген қисық сызықты координаталар жүйесінде орынды

$$P^{ij} \approx \left(-p + \lambda_1 J_1^{**}\right) g^{ij} + 2\lambda_2 g^{i\alpha} g,^{j\beta} e_{\alpha\beta}, \qquad (6.2)$$

немесе

$$P_{ij} = \left(-p + \lambda_1 J_1^{**}\right) g_{ij} + 2\lambda_2 e_{ij}. \qquad (6.2)'$$

(6.2) формуласы ньютон сұйығының (газының) қасиетін көрсететін заң, сол себепті **Навье-Стокс заңы** деп аталады. Мұндағы p, λ_1, λ_2-коэффициенттері термодинамикалық айнымалыларға тәуелді болуы мүмкін, бірақ e_{ij} тензорына тәуелсіз.

Декарт координаталар жүйесіндегі (6.2) Навье-Стокс заңының түрі

$$i = j, \qquad P_{ii} = -p + \lambda_1 \operatorname{div} \vec{v} + 2\lambda_2 \frac{\partial v_i}{\partial x^i},$$

$$i \neq j, \qquad P_{ij} = 2\lambda_1 e_{ij} = \lambda_2 \left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i} \right).$$

Сұйық тепе-теңдік қалпында болғанда $e_{ij} = 0, \quad J_1^{**} = 0$, $P^{ij} = -pg^{ij}$. Бұл жағдайда, $\vec{P}_n$ кернеу векторының тек нормаль құраушысы ғана болады

$$\vec{P}_n = \vec{n}P^{ij} = -p\vec{n}g^{ij} = -p\vec{n},$$

яғни ол қысымды білдіреді. Тыныштықта тұрған сұйық (газ тәрізді орта) сығылған күйде болады. Бұдан шығатын қорытынды, p – гидростатикалық қысым параметрі.

Егер қозғалыс барысында λ_1 және λ_2 параметрлері нольден өзгеше болса, нормалі $\vec{n}$ ауданшадағы кернеу векторының нормаль құраушысымен қатар, тангенциал (жанама) құраушысы да болады. Соңғы құраушы сұйықтың көршілес жатқан қабаттарының арасындағы тұтқырлық немесе үйкеліс күшінің әсерінен болады. Сондықтан λ_1 және λ_2 коэффициенттерін тұтқырлық коэффициенттері деп атайды. Навье-Стокстің (6.2) заңына бағынатын сұйық (газ) тұтқыр сұйық (газ) делінеді. (6.2) заңын мына түрге келтіруге болады

$$P^{ij} = -pg^{ij} + \tau^{ij},$$

мұндағы тензор $\tau^{ij} = \lambda_1 J_1^{**} g^{ij} + 2\lambda_2 g^{i\alpha} g^{i\beta} e_{\alpha\beta}$ тұтқырлық кернеу тензоры деп аталады. Сұйық сығылмайтын болса

$$J_1^{**} = \nabla_i v^i = 0, \qquad \tau^{ij} = 2\lambda_2 g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}.$$

Сонымен сығылмайтын сұйықтың тұтқырлық кернеуінің тензоры жылдамдықтар деформациясының тензорына тура пропорционал.

Навье-Стокс заңынан, кернеу тензорының бірінші инварианты мен деформация жылдамдықтарының тензоры мынадай арақатынас арқылы байланысады

$$\frac{1}{3}J_1^p = -p + \frac{1}{3}\left(3\lambda_1 + 2\lambda_2\right)J_1^{**}. \qquad (6.3)$$

Сығылмайтын сұйық үшін $J_1^{**} = 0$ болғандықтан, бұл арақатынастың түрі мынадай

$$p = -\frac{1}{3}J_1^p = -\frac{1}{3}\left(P_1 + P_2 + P_3\right),$$

мұндағы $P_i \quad (i = 1,2,3)$ кернеу тензорының бас компоненттері. Классикалық жағдайда кернеу тензоры симметриялы болғандықтан үш өзара ортогональ ауданшада ол өзінің бас компоненттеріне ие болады. Формулада қабылданғандай қозғалыстағы сығылмайтын сұйықтағы қысым, үш өзара ортогональ ауданшадағы орташа нормаль қысымға сәйкес келеді. Қозғалыстағы сығылатын сұйықта (газда) бұл қасиет орындалу үшін, (6.3) формуладағы төменгі көбейткішті

$$3\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \qquad \left(\lambda_1 = -\frac{2}{3}\lambda_2\right),$$

яғни тұтқырлықтың бір ғана динамикалық коэффициентін $\lambda_2 = \mu$, қарастырса жеткілікті, ал λ_1 коэффициенті соңғы формуладан анықталады. Бұл арақатынас қосымша Стокс гипотезасы болып табылады.

6.1.1. Сығылмайтын идеал сұйық

Кейбір жағдайларда тұтқырлықтың әсері ескерусіз аз деп есептеуге болады. Мұндай сұйықтар үшін λ_1 және λ_2 коэффициенттері нольге тең, сол себепті ортаның қасиеттерін сипаттайтын теңдеудің түрі

$$P^{ij} = -pg^{ij}. \qquad (6.4)$$

Осындай түрдегі теңдеулермен сипатталатын сұйықты – идеал сұйық дейміз. Идеал сұйықтағы кернеу тензорының мәні, тыныштықта тұрған тұтқыр сұйықтың кернеу тензорының мәнімен бірдей болады. Олай болса, идеал сұйықтың кез келген қозғалысында еркін бейімделген ауданшаның берілген нүктесіне түсетін кернеу векторы осы ауданшаның нормалі бойынша бағытталады. Тұтқыр сұйықта бұл қасиет тек тепе-теңдік жағдайда ғана орындалады.

Тұтас ортаның динамикалық қозғалыс теңдеуі (4.10) $\nabla_i \vec{P}^i = -\nabla p$ шартына байланысты идеал сұйық үшін төмендегідей жазылады

$$\rho \frac{d\vec{v}}{dt} = \rho \vec{F} - \nabla p. \qquad (6.5)$$

Соңғы өрнек Эйлердің үш скаляр теңдеуіне эквивалентті:

$$\rho \frac{dv^i}{dt} = \rho F^i - \nabla^i p, \qquad (6.6)$$

мұндағы ((2.8) қара)

$$\frac{dv^i}{dt} = \frac{\partial v^i}{\partial t} + \left(v^j \nabla_j\right) v^i .$$

Бұл теңдеулерге сығылмайтын сұйықтың үзіліссіздік теңдеуін қосу керек

$$\nabla_i v^i = 0 . \qquad (6.7)$$

Идеал сығылмайтын сұйықтардың моделі (6.6) және (6.7) тұйықталған теңдеулер жүйесі арқылы анықталады. Декарт координаталар жүйесіндегі (6.6) және (6.7) теңдеулер жүйесінің түрі төмендегідей

$$\rho\left(\frac{\partial v^i}{\partial t} + v^j \frac{\partial v^i}{\partial x^j}\right) = \rho F^i - \frac{\partial p}{\partial x^j}, \qquad \frac{\partial v^i}{\partial x^i} = 0.$$

6.1.2 Идеал баротропты газ

Егер сұйық сығылатын болса, онда оны газ деп атайды. Идеал газдың қозғалысын қарастырайық. Бұл жағдайда кернеу тензоры, сығылмайтын сұйықтардағы сияқты шарлық тензор деп аталады, яғни $P^{ij} = -pg^{ij}$.

Қозғалыс теңдеулерін (6.6) үзіліссіздік теңдеуімен (4.3) толықтыру керек

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_i \left(\rho v^i\right) = 0 , \qquad (6.8)$$

Декарт координаталар жүйесіндегі (6.8) теңдеуінің түрі

$$\frac{\partial \rho}{dt} + \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\rho v^i\right) = 0.$$

Төрт теңдеулер жүйесінде (6.6) және (6.8) бес белгісіз шамалар бар $\left(v^i, p, \rho\right)$, сондықтан теңдеулер жүйесі тұйықталмаған.

Идеал газдың қозғалысын қарастырғанда кейбір жағдайларда, қысымды тек тығыздықтың функциясы деп есептеуге болады

$$p = p(\rho) \quad \text{немесе} \quad \rho = \rho(p). \tag{6.9}$$

Осындай тәуелділік орын алатын процестер, **баротропты процестер** деп аталады. Мысал ретінде Клапейрон теңдеуіне бағынатын газдардың $T = \text{const}$ изотермиялық қозғалысын алуға болады

$$p = \rho RT, \tag{6.10}$$

мұндағы R - газ тұрақтысы.

Бұл жағдайда (6.6), (6.8) және (6.9) v^i, p, ρ шамаларын анықтайтын тұйықталған теңдеулер жүйесі болып табылады. Жоғарыдағы теңдеулер жүйесі идеал баротропты газдардың моделін анықтайды.

Механикалық қозғалыста бұл модель идеал сығылмайтын сұйықтардың моделі сияқты жылулық процестерден тәуелсіз.

Егер баротроптылық шарты орындалмаса, онда сығылатын газдардың қозғалыстарын сипаттау үшін, термодинамикалық табиғаты бар қосымша теңдеулерді енгізу қажет.

6.1.3 Идеал қаныққан газ

Төмендегі екі функцияға бағынатын тұтас ортаны қаныққан

$$U = c_v T + \text{const}, \qquad p = \rho RT, \tag{6.11}$$

идеал газ деп атайды. c_v – тұрақты көлемдегі меншікті жылу сиымдылық.

Ішкі энергияның өзгерісі dU газдың тығыздығын азайтатын сырттан келетін жылу ағынымен $dq^{(e)}$ байланысты

$$dU = c_v dT = -pd\left(\frac{1}{\rho}\right) + dq^{(e)} \ . \qquad (6.12)$$

Үзіліссіздік теңдеуі (6.8) және Эйлердің үш қозғалыс теңдеулері (6.6) алты белгісіз скалярлық функцияларды ρ, v^i, p, T анықтайтын тұйық жүйені береді. Δt уақытта ортаның Δm бірлік массасына келетін жылу мөлшері

$$dq^{(e)} = -\frac{1}{\rho}\operatorname{div}\vec{q}dt = -\frac{1}{\rho}\nabla\vec{q}dt, \qquad (6.13)$$

мұндағы $\vec{q}$ векторы, жылу ағынының векторы деп аталады. Жылу ағынының векторы $\vec{q}$ көбінесе изотропты орта үшін T температура өрісімен Фурье заңы арқылы байланысқан

$$\vec{q} = -\lambda\nabla T = -\lambda \operatorname{grad} T, \qquad (6.14)$$

мұндағы λ- жылуөткізгіштік коэффициенті, T – абсолют температура. Қарапайым жағдайдың бірін λ=const қарастырайық. Сонда, газдың бірлік массасына қатысты сырттан келген жылу ағыны $dq^{(e)}$ үшін (6.14) негізінде (6.13) формуладан мынаны аламыз

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{\lambda}{\rho}\operatorname{div}(\nabla T) = \frac{\lambda}{\rho}\nabla_i(\nabla^i T),$$

немесе

$$\frac{dq^{(e)}}{dt} = \frac{\lambda}{\rho}\nabla^2 T$$

мұндағы $\nabla_i \nabla^i = \nabla^2$ - Лаплас операторы.

Сонымен, егер сырттан келген жылу Фурье заңы және $dq^{(**)} = 0$ ((5.9) қара) арқылы берілсе, онда қаныққан идеал газ үшін сырттан келген жылу ағыны теңдеуінің түрі төмендегідей болады

$$c_V \frac{dT}{dt} = c_V \left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i \frac{\partial T}{\partial x^i} \right) = -p \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} + \frac{\lambda}{\rho} \nabla^2 T . \qquad (6.15)$$

6.1.4.Сығылмайтын тұтқыр сұйық

Біртекті сығылмайтын тұтқыр сұйықтың изотермиялық қозғалысын қарастырайық. Сұйықтың сығылмайтындығы мен біртектілігіне қойылатын талаптың салдары сұйық тығыздығының тұрақты болуы:

$$\rho = const .$$

Егер кернеулер тензоры деформация жылдамдықтарының тензорымен Навье-Стокс заңы арқылы байланысқан болса, онда сұйық тұтқыр болады. Сондықтан, идеал сұйықтан тұтқыр сұйықтың өзгешелігі беттік күштің нормаль құраушысынан басқа жанама құраушысы да болады.

Изотермиялық процесте тұтқырлық коэффициенттерін тұрақты деп алуға болады. Осы жағдайды және сығылмайтындық шартын $\left(J_1^{**} = \nabla_i v^i = 0\right)$ ескеріп, (6.2) өрнектен мынаны аламыз:

$$P^{ij} = -pg^{ij} + 2\mu g^{i\alpha} g^{i\beta} e_{\alpha\beta} ,$$

мұндағы

$$e_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i v_j + \nabla_j v_i\right).$$

Сығылмайтын тұтқыр сұйықтың қозғалыс теңдеулерін алу үшін (4.11) теңдеулеріндегі кернеу тензорының дивергенциясын ашып жазайық

$$\nabla_j P^{ij} = -g^{ij}\nabla_j p + \mu\nabla_j g^{i\alpha} g^{j\beta}\left(\nabla_\alpha v_\beta + \nabla_\beta v_\alpha\right) =$$
$$= -g^{ij}\nabla_j p + \mu g^{i\alpha}\nabla_j\nabla_\alpha v^j + \mu g^{j\beta}\nabla_j\nabla_\beta v^i =$$
$$= -g^{ij}\nabla_j p + \mu\nabla^\beta\nabla_\beta v^i,$$

немесе

$$\nabla_j P^{ij} = -\nabla^i p + \mu\nabla^2 v^i$$

ал векторлық түрде

$$\nabla_i \vec{P}^i = -\nabla p + \mu\nabla^2\vec{v}.$$

Қарастырылып отырған жағдайда тұтас ортаның қозғалыс теңдеулерінің түрі ((4.10) қара)

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\nabla\right)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu\nabla^2\vec{v}, \qquad (6.16)$$

немесе компоненттері арқылы жазса

$$\frac{\partial v^i}{\partial t} + \left(v^j\nabla_j\right)v^i = F^i - \frac{1}{\rho}\nabla^i p + \nu\nabla^2 v^i, \qquad (6.16)'$$

мұндағы $\nu = \mu/\rho$ – кинематикалық тұтқырлық коэффициенті. (6.16), (6.16)' теңдеулерін **Навье-Стокс теңдеулері** деп атайды. Осы теңдеулерге (6.7) үзіліссіздік теңдеуін қосып, жылдамдық пен қысымның үш компоненттерін анықтайтын тұйық теңдеулер жүйесін аламыз, яғни

$$\begin{cases} \dfrac{\partial v^i}{\partial t} + \left(v^j \nabla_j\right) v^i = F^i - \dfrac{1}{\rho}\nabla^i p + \nu \nabla^2 v^i, \\ \nabla_i v^i = 0. \end{cases} \qquad (6.17)$$

Навье-Стокс теңдеулері сұйықтың кез келген түрлері үшін орындалады, ал $(\nu = 0)$ идеал сұйық үшінЭйлердің қозғалыс теңдеулеріне айналады.

6.1.5. Сығылатын тұтқыр сұйық

Сығылатын тұтқыр сұйық үшін кернеу тензорының түрі

$$P^{ij} = -pg^{ij} + \lambda_1 g^{ij} \operatorname{div} \vec{v} + 2\mu g^{i\alpha} g^{j\beta} e_{\alpha\beta}. \qquad (6.18)$$

λ_1– коэффициентінің орнына екінші тұтқырлық коэффициентін ς енгізуге болады

$$\varsigma = \lambda_1 + \frac{2}{3}\mu .$$

ς, λ_1, μ коэффициенттері түрлі орта үшін әртүрлі және температураның функциясы немесе берілген орта үшін тұрақты физикалық шамалар болуы мүмкін. Мысалы, практикада тұтқыр ортаның коэффициенттерінің ς, μ мәндері белгілі және тұрақты жағдайы жиі кездеседі.

Егер тұтқырлық коэффициенті тұрақты болса, сығылатын тұтқыр сұйықтың қозғалыс теңдеуі – Навье-Стокс теңдеуінің түрі

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \nabla)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \left(\frac{\xi}{\rho} + \frac{\nu}{3}\right)\nabla \cdot \left(\operatorname{div} \vec{v}\right) + \nu \nabla^2 \vec{v}. \qquad (6.19)$$

Сырттан ағып келген жылудың теңдеуін (5.9) қайтымды процесс үшін $(dq' = 0)$, термодинамиканың 2-ші заңын ескеріп жазсақ:

$$c_V\left(\frac{\partial T}{\partial t} + v^i\frac{\partial T}{\partial x^i}\right) = -p\frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} + \frac{1}{\rho}\tau^{ij}\cdot e_{ij} + \frac{\lambda}{\rho}\nabla^2 T. \qquad (6.20)$$

Сонымен үзіліссіздік теңдеуі (6.8), қозғалыс теңдеулері (6.19), сырттан ағып келген жылу теңдеуі (6.20), сол сияқты Клапейрон теңдеуі (6.10) сығылатын тұтқыр сұйық (газ) моделі үшін ρ, v^i, p және T характеристикаларын анықтайтын тұйық жүйені береді.

(5.3) және (6.8) үзіліссіздік теңдеулерін ескерсек, ішкі кернеулердің элементар жұмысының тұтқыр сұйықтың бірлік массасына қатынасы мынаған тең

$$\frac{\delta A^{(i)}}{\Delta m} = pd\left(\frac{1}{\rho}\right) - \frac{\tau^{ij}\cdot e_{ij}}{\rho}dt.$$

6.2. Тұтқыр сұйық ағындарының модельдері

Навье-Стокс теңдеулерінің дәл шешімдерін табу жалпы жағдайда математикалық қиындыққа әкеліп соғады. Ол қиындықтар Навье-Стокс теңдеулерінің сызықты еместігінің салдарынан болады. Солай бола тұра кейбір дербес ламинарлық тұтқыр сұйық ағыны жағдайларында (құбырдағы Пуазейль ағыны, екі параллель қабырғаның арасындағы Куэтта ағыны және т.б.) Навье-Стокс теңдеулерінің дәл шешімдерін табуға болады.

Навье-Стокстің дифференциалдық теңдеулері сұйықтың әрбір элементіне түсірілген массалық күштер (салмақ), беттік күштер және инерция күштерінің тепе-теңдігін өрнектейді.

Тұтқыр сұйық қозғалысын зерттегенде әртүрлі физикалық шамалардың өлшемділігіне байланысты біраз нәтижелерді алуға болады. Бұған қатты денені сығылмайтын (тығыздығы $\rho = \mathrm{const}$) стационар сұйықпен орай ағу жатады.

Сұйықтың өзін сипаттайтын параметрлерден, Навье-Стокстің гидродинамикалық теңдеулеріне тек ν кинематикалық тұтқырлық кіреді. Теңдеулерді шешу барысында анықталатын белгісіз функцияларға $\vec{v}$ жылдамдық және p қысым жатады. Одан басқа сұйықтың ағыны шектік шарттар арқылы дененің формасы мен өлшеміне байланысты болады. L және v – сәйкесінше ұзындықтың характерлік сызықты өлшемі және ағынның жылдамдығы болсын дейік.

Бұл жағдайда инерциялық $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ және тұтқырлық $\nu\nabla^2\vec{v}$ күштері өлшемдік жағынан, яғни v^2/L және $\nu v/L^2$ сәйкес пропорционал. Инерциялық күштің үйкеліс күшіне қатынасы тұрақты өлшемсіз параметр vL/ν болады. Бұл параметр– Рейнольдс саны деп аталады

$$\mathrm{Re} = \frac{vL}{\nu}.$$

6.2.1 Рейнолдьс санының аз мәндеріндегі ағындар. Стокс моделі

Өте баяу ағыстарда, сол сияқты өте тұтқыр сұйықтардың ағысын қарастырғанда үйкеліс күштері инерция күштеріне қарағанда едәуір көп болады. Шын мәнінде, үйкеліс күштері жылдамдықтың бірінші дәрежесіне, ал инерция күштері жылдамдықтың квадратына пропорционал. Сондықтан бірінші жуықтау бойынша, тұтқырлыққа тәуелді мүшелерімен салыстырғанда инерциялық мүшелерді толық ескермеуге

болады. Сонымен (6.16) Навье-Стокс теңдеулері Рейнольдс санының аз мәндеріндегі қозғалыс үшін кәдімгідей ықшамдалады. Тұтқыр сығылмайтын сұйықтың стационар қозғалысында инерциялық мүшелер $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ мен массалық күштерді $\vec{F}$ ескермесек, онда теңдеудің түрі төмендегідей болады

$$\nu\nabla^2\vec{v}-\frac{1}{\rho}\nabla p=0, \qquad (6.21)$$

үзіліссіздік теңдеуімен бірге

$$\nabla\cdot\vec{v}=0 \qquad (6.22)$$

Стокс теңдеулерін құрайды.

(6.21) теңдеуіне ротор операциясын пайдалану арқылы алынатын сызықты дифференциалдық теңдеуді

$$\nabla^2(\mathrm{rot}\,\vec{v})=0 \qquad (6.23)$$

енгізейік. Бұл теңдеуді шешу мүмкіншілігі (6.21) толық теңдеуін шешуге қарағанда кеңірек. (6.23) теңдеуін қанағаттандыратын ағындар **сырғып ағатын қозғалыстар** делінеді.

Сырғып ағатын қозғалыстарды Рейнольдс санының өте аз мәндеріндегі $(\mathrm{Re}\to 0)$ шектік жағдайдағы Навье-Стокс теңдеулерінің шешімдері ретінде қарастыруға болады. Сырғып ағатын қозғалыстар теориясының практикалық қолданылуы шектеулі, олар: гидродинамикалық майлау теориясы (мысалы, цапфа мен подшипниктің арасындағы тар қабатты майлайтын майдың ағыны).

Керісінше, (6.21) теңдеуіндегі тұтқырлыққа тәуелді мүшелер инерциялық мүшелерден мейлінше аз басқа шектік жағдай, ол ортаның тұтқырлық коэффициенті аз (мысалы, су мен ауа) болғанда және жоғарғы жылдамдықтарда орын алады. Бұл шектік жағдайда Рейнольдс саны өте үлкен $(\mathrm{Re}\to\infty)$ болады.

6.2.2 Рейнольдс санының үлкен мәндеріндегі ағындар. Прандтльдің шекаралық қабат моделі

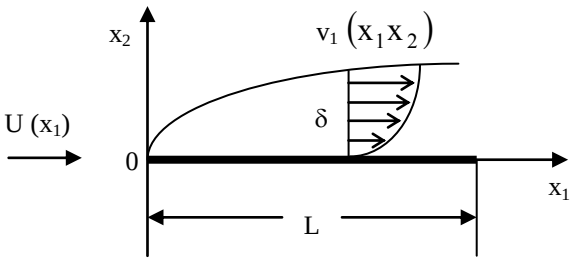
Екінші шектік жағдайды, яғни тұтқырлық өте аз немесе Рейнольдс санының өте үлкен жағдайын қарастырайық.

Өзімізге белгілі, Рейнолдьс санының мәні өте үлкен дегеніміз, тұтқырлығы өте аз жағдаймен эквивалентті. Сондықтан осындай Рейнольдс санының мәндерінде сұйықты идеал сұйық деп қарастыруға болады. Бірақ мұндай болжаулар қатты дене қабырғасының маңындағы сұйықтың қозғалысы үшін дұрыс емес. Идеал сұйық үшін шекаралық шарттар жылдамдықтың нормаль құраушысының нольге тең болғандығын талап етеді, дененің бетін орай ағатын сұйық жылдамдығының жанама компоненттері шектеулі болады. Реал тұтқыр сұйықтың қатты дененің қабырғасындағы жылдамдығы жұғу шартының әсерінен нольге айналады. Осыдан Рейнольдс санының үлкен мәндерінде жылдамдықтың нольге дейінгі кемуі сұйықтың қабырға маңындағы жұқа қабатында өтеді деген қорытынды шығаруға болады.

Осыған байланысты жұқа қабаттың ішіндегі тұтқырлықты ескермеуге болмайтын, тұтқыр сұйықтың шегіндегі жұқа шекаралық қабат үшін Прандтль теориясы пайда болды. Бұл теория бойынша сұйықтың негізгі ағыны **идеал** және ішінде тұтқыр сұйығы бар **жұқа шекаралық қабаттан** тұрады деп алынады. Шекаралық қабаттың шегінде екі ағын бір - бірімен түйіседі.

Шекаралық қабаттағы қозғалыс ламинарлық немесе турбуленттік болуы мүмкін. Ағыстардың әртүрлі режимдерінде сұйықтар қозғалысының шекаралық қабаттағы ламинарлық немесе орташа турбуленттік қозғалыстың негізгі характеристикалары мен заңдары бір –бірінен мүлде өзгеше болады. Ламинар шекаралық қабаттың теориясын қарастырайық.

Шекаралық қабат теориясының теңдеулерін алу үшін, қозғалмайтын жұқа пластинканы сығылмайтын тұтқыр сұйықпен орай аққандағы модельдік есепті қарастырайық (6-суретті қара).



6-сурет

Шекаралық қабаттағы қозғалыс теңдеуін қорытып шығару, кішкентай мүшелерді ескермеу және Навье-Стокс теңдеулеріндегі әртүрлі мүшелердің реті туралы гипотезалар мен бағалауларға негізделген; мұнда шектеулі мүшелер ғана сақталады.

x_1x_2 жазықтығындағы стационар жазық параллель қозғалыс үшін сығылмайтын тұтқыр сұйық қозғалысы теңдеулерінің декарт координаталар жүйесінің сәйкес осьтеріндегі проекциялары:

$$v_1\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_1}{\partial x_2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}\right), \qquad (6.24)$$

$$v_1\frac{\partial v_2}{\partial x_1}+v_2\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_2}+\nu\left(\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2}+\frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2}\right), \qquad (6.25)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1}+\frac{\partial v_2}{\partial x_2}=0\,. \qquad (6.26)$$

L – белгілі бір характерлік өлшем, мысалы, пластинаның ұзындығы, ал x_1 координатасының функциясы болып табылатын шекаралық қабаттың «қалыңдығы» - δ.

Шекаралық қабат өте жұқа болғандықтан $(\delta << L)$ оның ішіндегі қозғалыс негізінен орай ағатын бетке параллель болады, яғни v_2 жылдамдығы v_1 - мен салыстырғанда аз. Дербес жағдайда үзіліссіздік (6.26) теңдеуінен мынаны аламыз

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_2} = -\frac{\partial v_1}{\partial x_1}, \qquad v_2 = -\int_0^{\delta} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} dx_2 \sim \delta, \qquad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_2^2} \sim \frac{1}{\delta},$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial x_1} \sim \delta, \qquad \frac{\partial^2 v_2}{\partial x_1^2} \sim \delta.$$

Мұндағы δ шамасы немесе дәлірек айтқанда δ / L негізгі аз шама ретінде қабылданады. Шекаралық қабатта x_1 айнымалысы шектеулі, ал x_2 айнымалысының өзгеру интервалының реті δ болсын деп ұйғарайық. $v_1(x_1 x_2)$шамалары және олардың туындылары $\frac{\partial v_1}{\partial x_1}$, $\frac{\partial^2 v_1}{\partial x_1^2}$ шекаралық қабаттың ішінде және негізгі ағынның шекарасында шектеулі деп алайық. Бұдан

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_2} \sim \frac{1}{\delta}, \qquad \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2} \sim \frac{1}{\delta^2}.$$

Осы бағалаудың негізінде (6.24), (6.25) және (6.26) теңдеулерінің әрбір мүшелерінің шамасын анықтау қиын емес. (6.24) теңдеуінен көрініп тұрғандай L және U шектеулі болғанда, - $\frac{\nu}{\delta^2}$ та шектеулі екендігін айта кеткен жөн. Өлшемсіз түрі мынадай

$$\frac{\delta^2}{L^2} \approx \frac{\nu}{UL} \quad \text{немесе} \quad \delta \approx L\sqrt{\frac{\nu}{UL}} = \frac{L}{\sqrt{Re}}. \qquad (6.27)$$

Осы бағалаулар шекаралық қабаттағы Навье-Стокс теңдеулерін ықшамдауға негіз болды. (6.24)-(6.26) теңдеулеріндегі тек қана шектеулі мүшелерді қалдырғаннан кейін шекаралық қабаттың теңдеуі төмендегідей болады

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \qquad (6.28)$$

$$\frac{\partial p}{\partial x_2} = 0 \quad \text{немесе} \quad p = p(x_1). \qquad (6.29)$$

Бұл теңдеулерге үзіліссіздік теңдеуін (6.26) қосу керек. (6.28) теңдеуі сызықты емес күйінде қалады.

Шекаралық қабаттың көлденең қимасында қысым тұрақты болып сақталады және ол идеал сұйықтың теориясынан есептелінетін негізгі ағындағы шекаралық қабаттың мәнімен анықталады. Сондықтан (6.25) теңдеуіндегі қысымдар айырымын белгілі деп есептеп $\frac{\partial p}{\partial x_1}$ орнына толық туындыны $\frac{dp}{dx_1}$ жазуға болады. Идеал сұйықтың шекаралық қабатының сыртындағы қозғалысы потенциалдық болғандықтан, бұл жерде Бернулли формуласы орынды

$$p + \rho\frac{U^2}{2} = \text{const},$$

бұдан

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dx_1} = -U\frac{dU}{dx_1}.$$

Сонымен, ламинарлық шекаралық қабатта қозғалыс теңдеулер жүйесін– Прандтль теңдеуі түрінде аламыз

$$v_1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial v_1}{\partial x_2} = U \frac{dU}{dx_1} + \nu \frac{\partial^2 v_1}{\partial x_2^2}, \qquad (6.30)$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} = 0. \qquad (6.31)$$

Бұл теңдеулердің шектік шарттары: қабырғаға сұйықтың жұғуы, яғни

$$x_2 = 0 \quad \text{болғанда} \quad v_1 = v_2 = 0$$

және шекаралық қабаттың сыртқы шетіндегі жылдамдық, сыртқы ағынның жылдамдығымен сәйкес болады.

6.3. Серпімді тұтас орта

Егер деформация күйі, деформация тензорымен ε_{ij} сипатталатын болса, ондай тұтас орта **серпімді орта** делінеді.

Осы ортаның барлық күйлері үшін кез келген нүктеде және кез келген уақыт мезетінде кернеу тензоры P^{ij} деформация тензорының ε_{ij} өзара бір мәнді функциясы болып табылады. Осыдан жалпы жағдайда серпімді тұтас орталардың тәуелділік заңы келіп шығады

$$\begin{cases} P^{ij} = P^{ij}\left(\varepsilon_{ij}, M, \alpha_{ik}, \mu^i\right) \\ P_{\varepsilon=0} = 0. \end{cases} \qquad (6.32)$$

Мұндағы шамалардың мәні (6.1) формуладағыдай, $M(x^i)$ – ортаның қарастырылып отырған бөлшегінің тұрған нүктесі, μ^i термодинамикалық скаляр параметрлер, α_{ik} - анизотроптылықты сипаттайтын параметрлік тензор.

Серпімді ортаның анықтамасында (3.18) формуласының негізінде, қарастырылып отырған уақыт мезетінде кернеулі күйі тікелей орын ауыстыру векторының өрісіне тәуелді. Сол себепті ортаның бұрынғы күйімен қазіргі геометриялық түрін салыстыру қажет. Бірақ табиғи күйден қарастырылып отырған күйге қандай жылдамдықпен көшу тәсіліне тәуелсіз. Ескерте кететін жәйт, сұйықтарда (газдарда) белгілі бір нүктедегі кернеу күйін анықтау үшін қарастырылып отырған уақыт мезетіндегі жылдамдықтар өрісін білсе ғана болғаны. Серпімді ортаның табиғи күйі, абсолют қатты дененің орын ауыстырғанындай болып анықталады.

6.3.1. Сызықты серпімді дене

Сызықты серпімділік теориясын геометриялық және физикалық деп екіге бөлуге болады. Геометриялық сызықты серпімділік теориясында еркін қозғалатын ортаның бөлшектерінің орын ауыстыру векторымен бірге оның градиенті де аз деп алынады, яғни $|\vec{w}| << L$, $|\nabla\vec{w}| << 1$. Мұндағы L – белгілі бір характеристикалық өлшем. (3.22) формуласының негізінде геометриялық тұрғыдан сызықты болған жағдайда

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}\left(\nabla_i w_j + \nabla_j w_i\right),$$

деп қабылдауға болады.

Егер кернеу мен деформация арасындағы байланыс сызықты тәуелділікте болса, онда серпімділік теориясы физикалық тұрғыдан қарағанда сызықты делінеді. Ал табиғи күй жағдайында, бұл тәуелділік біртекті сызықты болуы қажет.

Физикалық сызықты серпімділік теориясы табиғи күйдің маңында серпімді ортаның сызықтық қасиеттерін көрсетеді.

Сызықты серпімділік теориясының дербес жағдайы – классикалық серпімділік теориясы. Егер сызықты серпімді дене қосымша біртектілік және изотроптылық гипотезаларын қанағаттандыратын болса, онда классикалық серпімді дене деп аталады. Біртектілік ұйғарымы бойынша барлық бөлшектер бірдей заңдылыққа бағынады. Изотроптылық ұйғарымы бойынша, механикалық тұрғыдан қарағанда, берілген нүктеде барлық бағыттардың тең ықтималдығы келіп шығады.

Математикалық тұрғыдан қарағанда бұл гипотезалардың қабылдануы, (6.32) тәуелділік аргументі ретінде M, α_{ik} айнымалыларын қабылдамауы керек, яғни мынадай түрде жазылады

$$P^{ij} = P^{ij}\left(\varepsilon_{ij}, \mu^{i}\right).$$

Бұл тәуелділік изотропты тензорлық функция болып саналады және сондықтан квадратты үш мүше ретінде де берілуі мүмкін

$$P^{ij} = b_0 g^{ij} + b_1 \varepsilon_{ij} + b_2 \varepsilon_{ij}^2,$$

мұндағы b_0, b_1 және b_2 коэффициенттері инвариантты J_1^*, J_2^*, J_3^* деформация тензоры мен μ^i термодинамикалық айнымалыларының функциялары болып табылады. Деформация тензорына қатысты сызықтылық талабы орындалу үшін

$$P^{ij} = \gamma_1 J_1^* g^{ij} + 2\gamma_2 g^{i\alpha} g^{i\beta} \varepsilon_{\alpha\beta}, \qquad (6.33)$$

немесе

$$P_{ij} = \gamma_1 J_1^* g_{ij} + 2\gamma_2 \varepsilon_{ij} \qquad (6.33)'$$

болуы қажет, мұндағы $J_1^* = \nabla_k w^k$, ал γ_1 және γ_2 шамалары жалпы айтқанда, μ^i термодинамикалық параметрінің функциясы болуы мүмкін. Егер $\gamma_1 = \text{const}$, $\gamma_2 = \text{const}$ болса,

(6.33) немесе (6.33)' заңдылығын изотропты серпімді орта үшін Гук заңы дейді (Гук анықтаған сызықты серпімді дене), ал γ_1 және γ_2 параметрлерін **Ламенің серпімді тұрақтылары** деп атайды.

Гук анықтаған серпімді дененің моделін анықтайтын тұйық теңдеулер жүйесін құрайық.

Сызықты серпімді денелер үшін үзіліссіздік теңдеуінің түрі

$$\rho = \rho_0\left(1 - J_1^*\right) = \rho_0\left(1 - \nabla_i w^i\right), \qquad (6.34)$$

дене табиғи жағдайда біртекті $\left(\rho_0 = \text{const}\right)$ деп ұйғарылады.

Орын ауыстыру мен жылдамдықтың шамалары өте аз болғандықтан

$$\vec{v} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{w} = \frac{d\vec{w}}{dt}, \qquad \vec{a} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}\cdot\nabla\right)\vec{v} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2}$$

деп қабылдауға болады. (3.22) формуласының көмегімен (6.33) Гук заңын кернеу мен орын ауыстыру арасындағы келесі байланыс түрінде қарастыруға болады

$$P^{ij} = \gamma_1 \nabla_k w^k g^{ij} + \gamma_2 g^{i\alpha} g^{j\beta}(\nabla_\alpha w_\beta + \nabla_\beta w_\alpha).$$

Кернеу тензорының дивергенциясының түрі

$$\nabla_j P^{ij} = \gamma_1 g^{ij}\nabla_j \nabla_k w^k + \gamma_2 g^{i\alpha}\nabla_j \nabla_\alpha w^j + \gamma_2 g^{j\beta}\nabla_j \nabla_\beta w^i =$$
$$= (\gamma_1 + \gamma_2)\nabla^i \nabla_k w^k + \gamma_2 \nabla^j \nabla_j w^i = (\gamma_1 + \gamma_2)\nabla^i \nabla_k w^k + \gamma_2 \nabla^2 w^i.$$

Сонда динамиканың теңдеулерін (4.13) орын ауыстыру арқылы өрнектесек

$$\rho_0 \frac{\partial^2 w^i}{\partial t^2} = \rho_0 F^i + (\gamma_1 + \gamma_2)\nabla^i \nabla_k w^k + \gamma_2 \nabla^2 w^i . \qquad (6.35)$$

(6.34) және (6.35) арақатынастары орын ауыстыру мен тығыздықты анықтайтын теңдеулер жүйесін құрайды. ρ_0 және F^i шамалары белгілі болып есептеледі. (6.35) теңдеулері **Ламе теңдеулері** делінеді. Ламе теңдеулерін қорытып шығару үшін деформация өте аз деп ұйғарылды. Деформациясы аз сызықты серпімділік теориясында (6.34) үзіліссіздік теңдеуін қарастырмауға да болады. Сондықтан (6.35) теңдеуінде бірінші ретті аз шама дәлдігімен ρ орнына ρ_0 алынды.

6.3.2. Сызықты термосерпімді дене

Барлық серпімді денелердің деформацияланатын процестері анықтама бойынша термодинамикалық тұрғыдан қайтымды. Сондықтан серпімді дененің физикалық шексіз аз бөлшектері үшін термодинамиканың екінші заңын пайдаланайық

$$TdS = dq^{(e)},$$

мұндағы $dq^{(e)}$ сырттан ағып келген жылу, dS бірлік массаның энтропиясының өсуі.

Қайтымды процестер кезіндегі ағып келген жылу теңдеуінің (5.10) түрі

$$dU = \frac{P^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} + TdS , \qquad (6.36)$$

немесе

$$dF = \frac{P^{ij}}{\rho} d\varepsilon_{ij} - SdT \qquad (6.37)$$

мұндағы F=U-TS – серпімді дененің еркін энергиясы. U – ішкі энергияның тығыздығы, оны серпімді орта моделі жағдайында мына түрде жазуға болады

$$U = U\left(\varepsilon_{ij}, S, \lambda_2^n\right), \quad F = F\left(\varepsilon_{ij}, T, \lambda_2^n\right). \tag{6.38}$$

Егер $d\varepsilon_{ij}$, dS (dT), $d\lambda_2^n$ тәуелсіз өсімшелер жүйесі бар болса, қосымша шарт бойынша P^{ij} тек қана ε_{ij}, S (немесе T), λ_2^i-ге тәуелді, онда (6.36) немесе соған сәйкес (6.37)-ден келесі теңдікті алуға болады

$$P^{ij} = \rho\left(\frac{\partial U}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{S,\lambda_2^n} = \rho\left(\frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}}\right)_{T,\lambda_2^n}, \tag{6.39}$$

$$T = \left(\frac{\partial U}{\partial S}\right)_{\varepsilon_{ij},\lambda_2^n}, \quad S = -\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_{\varepsilon_{ij},\lambda_2^n}, \tag{6.40}$$

$$\left(\frac{\partial U}{\partial \lambda_2^i}\right)_{\varepsilon_{ij},S} = 0, \quad \left(\frac{\partial F}{\partial \lambda_2^i}\right)_{\varepsilon_{ij},T} = 0. \tag{6.41}$$

(6.39) – (6.41) серпімді дененің күй теңдеулері деп аталады. Серпімді денелердің классикалық моделі үшін λ_2^n=const, яғни $d\lambda_2^n$=0.

Аз деформацияланатын денелер үшін F – тің орнына бірлік көлемдегі еркін энергияның $\Phi = \rho_0 F$ шамасын қарастырған дұрыс, ал күй теңдеуі мына түрде жазылады

$$P^{ij} = \frac{\partial \Phi}{\partial \varepsilon_{ij}}, \qquad S = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \Phi}{\partial T}. \tag{6.42}$$

Изотропты дене жағдайында Ф функциясын деформация тензорының инвариантының функциясы ретінде алуға болады

$$\Phi = \frac{1}{2}\lambda_1 J_1^* + \lambda_2 J_2^* - (3\lambda_1 + 2\lambda_2)\alpha_t J_1^*(T - T_0) - f(T).$$

Мұндағы α_t -сызықтық ұлғаю коэффициенті.

(6.42)-нің негізінде температуралық кернеулік күйі мен деформациясы ескерілген Гук заңының жалпыланған (6.33) түрін аламыз, атап айтқанда:

$$P_{ij} = \lambda_1 J_1^* g_{ij} + 2\lambda_2 \varepsilon_{ij} - (3\lambda_1 + 2\lambda_2)\alpha_t (T - T_0) g_{ij}, \qquad (6.43)$$

$$S = \frac{1}{\rho_0}(3\lambda_1 + 2\lambda_2)\alpha_t J_1^* + \frac{1}{\rho_0} f'(T). \qquad (6.44)$$

λ_1 және λ_2 коэффициенттері **Ламе параметрлері** деп аталады. Практика мен теорияда λ_1 және λ_2 параметрлерінің орнына Юнг модулі E_m және Пуассон коэффициенті $\sigma_п$ пайдаланады. Олар мынадай формулалармен анықталады

$$E_m = \frac{\lambda_2(3\lambda_1 + 2\lambda_2)}{\lambda_1 + \lambda_2}, \qquad \sigma_п = \frac{\lambda_1}{2(\lambda_1 + \lambda_2)}. \qquad (6.45)$$

(6.45) пайдаланып Гук заңын өрнектейтін (6.43) формулаларын төмендегідей түрде жазуға болады

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{E_m}\left[(1 + \sigma_п)P_{ij} - \sigma_п J_1^p g_{ij}\right] + \alpha_t (T - T_0) g_{ij},$$

мұндағы J_1^p – кернеу тензорының бірінші инварианты. Температуралық кернеулігі ескерілген, (6.43) формуласының негізінде біртекті изотропты дене үшін қарастырылып отырған Ламе теңдеуінің сызықтық заңы мына түрде өрнектеледі

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + (\lambda_1 + \lambda_2)\nabla(\nabla \cdot \vec{w}) + \lambda_2 \nabla^2 \vec{w} - \\ -(3\lambda_1 + 2\lambda_2)\alpha_t \cdot \nabla T. \qquad (6.46)$$

Егер көлемдік күштер мен температура, координаталардың функциясы ретінде белгілі, әрі шекарадағы орын ауыстырулар берілген болса, онда бастапқы шарттары белгілі теңдеулерден, дененің ішіндегі нүктелерінің орын ауыстыруларын табуға болады. Сонымен, орын ауыстыру кезіндегі серпімділік теориясының есептері шешілгеннен кейін, кернеулер Гук заңы арқылы есептеліп шығарылады.

Изотропты қатты дене үшін жылу өткізгіштік теңдеуінің түрі

$$\rho_0 C \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda \nabla^2 T - (3\lambda_1 + 2\lambda_2)\alpha_t \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{w}). \qquad (6.47)$$

Оң жақта тұрған екінші мүше көлемдік деформацияға байланысты жылудың бөлінуі. (6.46) және (6.47) теңдеулер жүйесіндегі орын ауыстыру векторы $\vec{w}$ мен температура T белгісіз, сондықтан екі теңдеу, екі белгісіз болғандықтан теңдеулер жүйесі тұйықталған. Белгісіз шамаларды анықтағанда теңдеулерді бірге шешу керек. (6.47) теңдеуіндегі көлемдік деформацияға байланысты жылудың пайда болуы аз шама болғандықтан, $(3\lambda_1 + 2\lambda_2)\alpha_t \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \cdot \vec{w})$ ескерілмейді. Бұл жағдайда (6.47) теңдеуінен температура анықталады. (6.46) теңдеуіндегі $(3\lambda_1 + 2\lambda_2)\alpha_t \nabla T$ мүшесі қосымша белгілі массалық күшті көрсетеді. Ал $T = \text{const}$ болғанда, Гуктың серпімді денеге арналған сызықты заңын (6.35) пайдалансақ (6.46) теңдеуі Ламе теңдеуіне айналады.

(6.43) арақатынасы ε_{ij} компонентіне қатысты шешіледі, кернеу нольге тең болғанмен ($P^{ij} = 0$), температуралардың өзгеруіне байланысты деформацияның нольден өзгеше екенін байқау қиын емес, яғни:

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = \alpha_t (T - T_0), \quad i \neq j \text{ болғанда } \varepsilon_{ij} = 0.$$

Сонымен (6.43)-ке енетін α_t коэффициенті қарастырылып отырған материалдың сызықтық ұлғаю коэффициентін көрсетеді. Сызықты термосерпімді дене үшін жылуөткізгіштік теңдеуіне енетін “c” коэффициенті тұрақты деформация кезіндегі жылу сиымдылыққа байланысты.

6.4. Ток өткізетін тұтас орталар

6.4.1. Магниттік гидродинамика

Магниттік гидродинамикада электромагниттік эффектілері ескерілетін тұтас орта моделінің мысалы ретінде өткізгіш сұйықтың моделін алуға болады.

Магниттік гидродинамикада тұтас орта ретінде поляризация мен магниттелу қасиеті болмайтын, бірақ электр тоғын $\vec{j} \neq 0$ өткізетін сұйық қабылданады. Қарастырылып отырған модельдерде $dq^{(**)} = 0$ екендігін ескеріп, тұтас ортаның жеке бөлшектері көрші бөлшектермен және сыртқы объектілермен тек қана механикалық және жылу энергияларымен ғана алмасады деп есептейік. Магнит және электр өрісі бар электр өткізгіштік ортаның қозғалысын зерттеу, магниттік гидродинамиканың негізін құрайды. Магниттік гидродинамикада қозғалысты сипаттау үшін гидродинамиканың теңдеулерімен қатар электродинамиканың теңдеулерінде қолданады.

Мысал ретінде сығылмайтын, тұтқыр, өткізгіш сұйықтың моделін қарастырайық. Ортаның физикалық қасиеттері біртекті, салыстырмалы диэлектрлік тұрақты ε_e мен магниттік өтімділіктің мәндері μ_e бірге жақын, $\varepsilon_e \approx \mu_e \approx 1$. Өткізгіштік ς тұрақты және изотропты деп есептейік.

Сонымен қатар өріс ағынындағы электромагниттік және магнит өрісі мен ток өткізгіштігінің өзара әсері болуы үшін, ортаның өткізгіштігі жеткілікті үлкен деп алайық. Магниттік гидродинамикада ығысу $\frac{\partial\left(\varepsilon_e \vec{E}\right)}{\partial t}$ және конвекция тоқтары $\rho_e \vec{v}$, өткізгіштік тоғымен $\vec{J}$ салыстырғанда ескерусіз аз. Осындай жағдайдағы магниттік гидродинамиканың теңдеулері лоренцтік күші ескерілген $\left(\vec{J} \times \vec{B}\right)$ Навье-Стокс теңдеулерінен (6.16) тұрады

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \cdot \nabla\right)\vec{v} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p + \nu \nabla^2 \vec{v} + \frac{1}{\rho}\left(\vec{J} \times \vec{B}\right). \qquad (6.48)$$

Джоульдік жылу $\left(\vec{J} \cdot \vec{E}\right)$ мен ортаның сығылмайтындығын $\left(\rho = \text{const}\right)$ ескеріп, ағып келген жылудың теңдеулерін (6.20) өрнектейік

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla T = \frac{\lambda}{\rho c_v}\nabla^2 T + \frac{\nu}{2c_v}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x^j} + \frac{\partial v_j}{\partial x^i}\right)^2 + \frac{1}{\rho c_v}\left(\vec{J} \cdot \vec{E}\right). \qquad (6.49)$$

Электромагниттік өріс үшін Максвелл теңдеулерін

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}, \quad \nabla \cdot \vec{J} = 0, \quad \nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \nabla \cdot \vec{H} = 0, \qquad (6.50), (6.51)$$

ортаның сығылмайтын жағдайдағы үзіліссіздік теңдеуімен

$$\nabla \cdot \vec{v} = 0, \qquad (6.52)$$

және өткізгіштік тоғы үшін жалпыланған Ом заңымен толықтырсақ

$$\vec{J} = \sigma\left[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}\right], \qquad (6.53)$$

мұндағы $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, μ_o - вакуумның магниттік өткізгіштігі.

Навье-Стокс және ағып келген жылудың теңдеулері мен Максвелл теңдеулерінің арасындағы байланыс төмендегідей: Навье-Стокс теңдеулеріне көлемдік электромагниттік күш

((6.48) теңдеуіндегі соңғы мүше) және джоульдік жылу ((6.49) теңдеуіндегі соңғы мүше), ал ағып келген жылудың теңдеулеріне – қозғалыстағы ортаның жылдамдығы енген. Соңғы жағдайды дәлелдеу үшін Ом заңындағы (6.53) $\vec{J}$ мәнін (6.50)-ге қойып, (6.51) теңдеуін пайдаланып ротор операциясын қолданса болғаны

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \nabla \times \left(\vec{v} \times \vec{B}\right) + \frac{1}{\sigma}\nabla^2 \vec{B}. \qquad (6.54)$$

(6.48), (6.49), (6.52)–(6.54) теңдеулері сығылмайтын сұйықтардың магниттік гидродинамикасында қарастырылады.

6.4.2 Магнитті серпімділік

Магниттік өрісте серпімді өткізгіш ортаның қозғалысы екі теңдеулер жүйелерімен сипатталады: серпімділік теориясы және электродинамика. Бұл теңдеулер, магниттік гидродинамикадағыдай қосымша мүшелермен өзара байланысқан.

Механикалық ұйтқыған жағдайда ығысу тоқтарын ескермеуге болады және ортада еркін электр зарядтар $\left(\rho_e = 0\right)$ жоқ деп жорамалдайық.

Осындай жағдайда өткізгіш ортаның изотропты магнитті серпімділігінің теңдеулер жүйесі, Лоренц күші мен температуралық кернеуі ескерілген, орын ауыстыру арқылы өрнектелген (6.46) динамикалық теңдеуіне көшеді

$$\rho_0 \frac{\partial^2 \vec{w}}{\partial t^2} = \rho_0 \vec{F} + \left(\lambda_e + \mu_e\right)\nabla\left(\nabla \cdot \vec{w}\right) + \mu_e \nabla^2 \vec{w} - \\ -\left(3\lambda_e + 2\mu_e\right)\alpha \cdot \nabla T + \vec{J} \times \vec{B}; \qquad (6.55)$$

Джоульдік жылуды ескеріп, изотропты қатты дене үшін жылу өткізгіштік теңдеуін жазайық

$$\rho_o c \frac{\partial T}{\partial t} = \lambda_e \nabla^2 T - \left(3\lambda_e + 2\mu_e\right)\alpha \frac{\partial}{\partial t}\left(\nabla \cdot \vec{w}\right) + \vec{J} \cdot \vec{E}. \qquad (6.56)$$

Динамикалық (6.55) және термодинамикалық теңдеулерге (6.56) электродинамикалық, атап айтқанда, (6.50), (6.51) және (6.53) теңдеулерін қосу керек.

6.5. Фильтрациялық ағындардың моделі

Массалық күштер мен гидродинамикалық қысым күштерінің әсерінен жер жыныстарының кеуек көздері арқылы тұтас ортаның, мысалы, судың, мұнайдың, т.б. қозғалысы **фильтрациялық ағындар** немесе **фильтрация** деп аталынады.

Фильтрация теориясын тұтас орта механикасының бір бөлігі ретінде қарастыруға болады. Фильтрацияның негізгі теңдеулерін қорытқанда, фильтрацияны сипаттайтын тәжірибелік заңдармен тұйықталатын идеал сұйықтың гидродинамикасының теңдеулері қолданылады.

6.5.1. Фильтрацияның негізгі ұғымдары және үзіліссіздік теңдеуі

Кез келген М нүктесін қоршап тұрған жер жынысының V көлемін қарастырайық. V көлеміндегі тесікшелердің (кеуектілік) көлемі V_1 болсын

$$\frac{V_1}{V} = \beta, \qquad (6.57)$$

қатынасына тең шама **көлемдік кеуектілік** немесе **жер жынысының кеуектілігі** деп аталады. Анықтамадан кеуектілік $0 \le \beta \le 1$ аралығында өзгеретіндігі келіп шығады. $\beta = 0$ болса, V көлемінде тесікше көздер болмайды. $\beta = 1$ болғанда бүкіл тесікшелер V көлемінің ішінде болады, яғни V көлемінің барлығына сұйық таралады. Реал жер жынысында β-ның мәні 0,25 -тен 0,9 аралығында өзгереді.

Біртекті жер жынысында β кеуектілік тұрақты шама, ал біртекті емес жер жынысында β кеңістік нүктелері координаталарының функциясы, мысалы, декарт координаталар жүйесінде $x^i\ (i=1,2,3)$ функциясы. Жер жынысының кеуектілігі t уақытқа байланысты өзгеруі және сұйықтың p гидродинамикалық қысымы мен T температурасына тәуелді болуы мүмкін. Сонымен, жалпы жағдайда кеуектілік β

$$\beta = \beta\left(x^i, t, p, T\right)$$

түріндегі функциональдық тәуелділікпен өрнектеледі.

V көлемді алып тұратын, жер асты жынысында өтетін сұйық бөлшектерінің орташа жылдамдықтарын анықтаудың практикалық мәні зор. V_1 тесікшелер көлемі бойынша орташа жылдамдық ұғымы **физикалық жылдамдық** $\vec{v}_ф$ және V көлемі бойынша орташа жылдамдық ұғымы **фильтрация жылдамдығы** $\vec{v}$ деп аталынады.

Жер асты жынысының көлемі V мен тесікшелер көлемі V_1 арқылы өтетін сұйық шығымының тұрақтылығы шартынан

$$\vec{v}_ф V_1 = \vec{v} V,$$

(6.57) ескерсек

$$\vec{v} = \beta \vec{v}_ф . \qquad (6.58)$$

(6.58) формуласынан физикалық жылдамдық $\vec{v}_ф$ сәйкесінше фильтрациялық ағынның $\vec{v}$ жылдамдығынан әрқашанда артық.

Фильтрациялық жылдамдық ұғымы кәдімгі ағынды бейнелемейді, ол орташа көлем бойынша жайғасқан реал жылдамдықпен байланысты шама болып табылады. Бұл ұғымды енгізу фильтрациялық ағынның қозғалыс теңдеулерін құру барысында қажет.

Фильтрация нәтижесінде бірлік уақытта жер жынысының белгілі бір V көлемінде σ бет арқылы ағып шығатын сұйықтың массасы

$$\int_{\sigma} \rho \ v_n d\sigma = \int_{v} \operatorname{div}(\rho\vec{v}) dV,$$

мұндағы v_n – σ бетінің нүктелеріндегі $\vec{v}$ фильтрация жылдамдығының нормаль құраушысы, ρ – тесікшелер арқылы өтетін реал сұйықтың тығыздығы. Кеуек ортаның V бірлік көлеміндегі сұйықтың массасы $\rho\beta$-ке тең. Оның бірлік уақыттағы бүкіл көлем бойынша азаюы төмендегі интегралмен өрнектеледі

$$-\int_{v} \frac{\partial(\rho\beta)}{\partial t} dV .$$

Олай болса массаның сақталу заңы негізінде

$$\int_{v} \operatorname{div} \ (\rho\vec{v}) dV = -\int_{v} \frac{\partial(\rho\beta)}{\partial t} dV,$$

бұдан фильтрациялық ағын үшін келесі үзіліссіздік теңдеуі алынады

$$\frac{\partial(\rho\beta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\vec{v}) = 0 \qquad (6.59)$$

немесе (6.58) формуласына сәйкес

$$\frac{\partial(\rho\beta)}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho\beta\vec{v}_{ф}) = 0 . \qquad (6.60)$$

(6.59) немесе (6.60) үзіліссіздік теңдеуі сұйық орналасқан көлем өзгермейтін шарт үшін жазылған фильтрацияланатын сұйық массасының сақталу заңын көрсетеді.

Жалпы жағдайда $\vec{v}$ және $\vec{v}_{ф}$ координаталар мен уақыттың функциялары, ρ фильтрацияланатын ортаның күй теңдеуінен анықталады. Осыған сәйкес ρ тығыздық, p қысым мен ортаның T температурасының функциясы, яғни $\rho = \rho(p, T)$.

6.5.2. Фильтрацияның динамикалық теңдеулері. Дарси заңы

Жер жынысындағы сұйықтар қозғалысының динамикалық теңдеулері фильтрациялық қозғалысты зерттеудің теориялық

негізі болып табылады. Фильтрация формалары күрделі, тар каналдарда, яғни тесікшелерде өтетіндіктен, бұл қозғалыстарда тұтқырлық күшінің ролі өте зор. Сондықтан фильтрацияны зерттегенде, тесікшелердің ішкі бетіндегі күрделі шектік шарттарда дәл шешімдері болмайтын тұтқыр сұйық қозғалысының Навье-Стокс теңдеулеріне сүйену қажет. Сол себепті фильтрацияның теориялық зерттеулерінің негізі ретінде фильтрацияның тәжірибелік заңдары енгізілген. Бұл заңдар гидродинамиканың теңдеулері сияқты жылдамдықтар өрісі, қысымдар мен массалық күштер арасындағы байланысты орнатады және фильтрациялық қозғалыста сұйық жылдамдықтарының орташа мәндері алынады.

Эйлер теңдеуі сұйықтың динамикалық сипаттамасының негізгі және қарапайым теңдеуі болып табылады. Ағынның орташа физикалық жылдамдығы $\vec{v}_ф$ немесе онымен (6.58) арақатынасымен байланысқан фильтрация жылдамдығы $\vec{v}$, Эйлер теңдеуін қанағаттандырсын дейік. Бұл ағынға гидродинамикалық қысым күші мен массалық күш әсер етеді. Сонымен қатар сұйық фильтрацияланғанда үйкеліс күші үлкен роль атқарады, сондықтан Эйлер теңдеуіндегі үйкеліс күштерін кедергі күштері арқылы модельдеуге болады. Өзімізге белгілі, кедергі күштері жылдамдықтың белгілі бір функциясы болып табылады және жылдамдық векторына қарама-қарсы жаққа қарай бағытталған, яғни бұл күштердің түрі $-f_1(v)\frac{\vec{v}}{v}$, мұндағы $f(v)$ - фильтрацияның жылдамдық векторы модулінің оң функциясы. Сонымен, фильтрациялық ағын қозғалысының теңдеуін келесі түрде жазуға болады

$$\frac{\partial\vec{v}}{\partial t}+(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}=\vec{F}-\frac{1}{\rho}\nabla p-f_1(v)\frac{\vec{v}}{v}. \qquad (6.61)$$

Фильтрациялық қозғалыстар өте аз жылдамдықпен өтеді (топырақ арқылы сіңуі өте баяу). Координаталар бойынша жылдамдықтардың өзгерісі көп емес. Сондықтан (6.61) теңдеуіндегі ортаның кедергі күшімен салыстырғанда инерциялық күшті $(\vec{v}\cdot\nabla)\vec{v}$ ескермеуге болады. (6.61) теңдеуінің түрі

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{F} - \frac{1}{\rho}\nabla p - f_1(v)\frac{\vec{v}}{v}. \qquad (6.62)$$

Дербес жағдайда, яғни сығылмайтын ауыр сұйықтың стационар ағысы үшін (6.62) теңдеуін былай жазуға болады

$$f_1(v)\frac{\vec{v}}{v} = -\nabla\left(\frac{p}{\rho} + gz\right), \qquad (6.63)$$

бұдан шығатын қорытынды, ізделініп отырған кедергі күші консервативті күшке жатады.

Тәжірибе жүзінде анықталғандай, ұсақ түйіршікті жер жынысында және фильтрацияның салыстырмалы аз жылдамдығында пьезометрлік қысым градиенті мен фильтрация жылдамдығы сызықты тәуелділікте болады

$$\vec{v} = -k_1\nabla p^*, \qquad (6.64)$$

мұндағы k_1 **фильтрация коэффициенті** деп аталынады және жылдамдықпен өлшемдес, $p^* = p + \rho gz$ - келтірілген қысым. Осы тәуелділік (6.64) **Дарси** заңы деп аталады. Дарси заңына бағынатын фильтрациялық ағындар, сызықты фильтрация деп аталады. (6.64) заңы біртекті жер жынысындағы ауырлық күші әсер етіп тұрған сығылмайтын сұйықтың сызықты стационар фильтрациясын сипаттайды. Дарси заңын пайдаланудың жоғарғы шегі төмендегідей Рейнольдс санында орындалады

$$Re = \frac{vd}{\nu} \le 3 \div 10 \ ,$$

мұндағы v – фильтрацияланатын ағынның жылдамдығы, d – жер жынысы бөлшегінің орташа сызықтық өлшемі, ν – кинематикалық тұтқырлық коэффициенті.

Фильтрация коэффициенті k_1 жер жынысының қасиеттеріне ғана тәуелді емес, (мысалы, шекті жағдайлар: k_1=0 абсолют өткізбейтін жер жынысы, $k_1 = \infty$ жер жынысындағы сұйықтың бос ағыны болады) фильтрацияланатын сұйықтың қасиетіне де атап айтқанда, ортаның μ динамикалық тұтқырлық коэффициентіне байланысты. Сонымен, k_1 фильтрация

коэффициенті әрі жер жынысын, әрі сүзілетін сұйықты да сипаттайды. Сондықтан (6.64) Дарси заңына сұйықтың тұтқырлық коэффициентін енгізіп, басқа түрде өрнектеген орынды

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu}\nabla p^* \qquad (6.65)$$

мұндағы k – кеуекті ортаның өтімділік коэффициенті.

Кез келген күштер, мысалы, электромагниттік күштер, ал фильтрацияланатын сұйықтың салыстырмалы қозғалысында – тасымал және Кориолис үдеулерінің инерция күштері үшін Дарсидің жалпыланған заңын келесі түрде жазуға болады

$$\vec{v} = \frac{k}{\mu}\left(\rho\vec{F} - \nabla p\right), \qquad (6.66)$$

k/μ - тұрақты шама. Яғни (6.66) заңдылығы біртекті жыныстардың стационар режимі мен тұтқырлығы тұрақты сұйықтар үшін орындалады.

Дарси заңы (6.64) мен оның жалпылама түрі (6.66) сызықты фильтрация үшін орындалады, физикалық жылдамдық пен фильтрация жылдамдығына байланысты, сұйық шығымы мен гидродинамикалық қысым, сұйықтың тығыздығы және оның тұтқырлығы арасындағы тәуелділікті анықтайды. Сонымен, тұтқыр сұйық қозғалысы теориясындағы Навье-Стокс теңдеуі мен идеал сұйық қозғалысы теориясындағы Эйлер теңдеуі қандай роль атқарса, бұл динамикалық заң сызықты фильтрация теориясында сондай рольді атқарады.

Сұйық фильтрациясын зерттегенде жер жынысының характеристикасы, сұйықтың негізгі қасиеттері, оларға әсер ететін күштер және фильтрация болатын термодинамикалық шарттар берілуі тиіс. Жер жынысы β кеуектілік пен k өтімділік коэффициенттерімен сипатталады, жалпы жағдайда белгілі бір координаталардың: уақыт, сұйықтың қысымы және сұйық пен жер жынысының температурасының функциясы түрінде берілуге тиіс. Фильтрация есептерінде массалық күштің орнына ауырлық күші алынады. Егер сұйық пен жер жынысының температурасы тұрақты болса, онда баротропты күй теңдеуінің түрі төмендегідей болады

$$p = \frac{p_0}{\rho_0}\rho, \qquad (6.67)$$

мұндағы p_0 және ρ_0 – ортаның белгілі күйінің қысымы мен тығыздығы.

Бұл жағдайдағы фильтрация есептерінде ізделінетін шамалар: жылдамдық өрісі $\bar{v}$, қысым өрісі p және сұйықтың тығыздығы ρ. Осы белгісіздерді анықтау үшін, Дарси заңының жалпыланған теңдеуі (6.66), үзіліссіздік теңдеуі (6.59) және күй теңдеуін (6.67) шешу керек.

ҚОРЫТЫНДЫ

Оқулық әл-Фараби атындағы Қазақ ұлттық университетінің механика-математика факультетінде оқылатын тұтас орта механикасы курсының оқу жұмыс бағдарламасына сәйкес жазылған. Сондықтан ол мемлекеттік стандарт бойынша құрылған типтік бағдарламаның негізгі, басты мәселелерін қамтиды. Оқулық білімді мамандарды қалыптастыруда күрделі математикалық және физикалық ғылымдарды тұтас орта механикасын ана тілінде меңгеруге (әліппе болып табылады) арналған.

Кітап ұлттық кадрлардың тұтас орта механикасы ауқымында өз бетімен білімдерін кеңейту барысында, оқулықтың соңындағы ұсынылған әдебиеттерді пайдаланса оқу оңайға түспек. Кітаптың басты мақсаты қазақ тілінде оқитын студенттерге қиналмайтындай орыс тілінде оқитын топтардың деңгейімен бірдей білім беру.

Оқулықтың міндеті студенттердің өздік жұмыстарына, сынаққа, емтиханға және коллоквиумдарға дайындық жұмыстарын орындауға көмектесу. Оқулықтың тағы бір қажеттілігі, Қазақстан Республикасы Білім және ғылым министрлігінің жаңа талабына сай, кредиттік технологияға өтуге байланысты студенттер пән бойынша өз бетімен дайындалуға мүмкіншілік береді.

Ш.Ә. Ершін

Кітапты баспаға дайындауда академик Ш.М.Айталиев пен профессор Ұ.Қ.Жапбасбаевтың оқулыққа берген рецензиясы мен құнды пікірлері үшін алғысымызды білдіреміз.

Авторлар оқулықтың жауапты редакторы, академик Ш.Ә.Ершінге оқулықты жазу барысындағы көрсеткен үлкен көмегі үшін алғысын айтады. Оқулықтың қолжазбасын қарап пікірлерін, талап тілектерін, кеңестерін айтқан механика кафедрасының меңгерушісі А.Ж. Қалтаевқа және кафедраның профессорларына рахметімізді айтамыз. Сол сияқты оқулықты баспаға даярлауға тигізген көмегі үшін Раисова Айман Садыққызына авторлар ризашылығын білдіреді.

Авторлар

ҰСЫНЫЛАТЫН ӘДЕБИЕТТЕР

1. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.1. – М.: Наука, 1976 – 576б.
2. Седов Л.И. Механика сплошной среды, т.2. – М.: Наука, 1976 – 536б.
3. Седов Л.И. Введение в механику сплошной среды. – М.:Физматгиз, 1962 – 284б.
4. Ильюшин А.А. Механика сплошной среды. – М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978 – 287б.
5. Мейз Дж. Теория и задачи механики сплошных сред. – М.: Мир, 1974 – 318б.
6. Жермен П. Курс механики сплошных сред. Общая теория. – М.: Высш. шк., 1983 – 399б.
7. Фомин В.Л. Механика континуума для инженеров. – Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1975. – 116б.
8. Ершин Ш.А., Шерьязданов Г.Б. Введение в механику сплошной среды.: учебное пособие. – Алматы: Қазақ университеті, 2003. –109 б.

ҚИСЫҚ СЫЗЫҚТЫ КООРДИНАТАЛАР ЖҮЙЕЛЕРІНДЕГІ ТЕҢДЕУЛЕРДІҢ МЫСАЛДАРЫ ЖӘНЕ ТЕНЗОРЛЫҚ АНАЛИЗДЕН ҚОСЫМША МӘЛІМЕТТЕР*

Ортогональ координаталар жүйелеріндегі Кристоффель символдары және кез келген координаталар жүйелеріндегі үзіліссіздік теңдеуі.

Үзіліссіздік теңдеуі мен қозғалыс теңдеулерін әртүрлі нақты қисық сызықты координаталар жүйелерінде дайын күйінде қосымша түрінде берген пайдалы.

Метрикалық тензор g_{ij} компоненттері арқылы Кристоффель символдарын $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta}$ өрнектейтін формулаларды кез келген ортогональ координаталар жүйесінде жазайық. Евклид және риман кеңістігінде Кристоффель символдары мына формулалармен анықталады

$$\Gamma^{j}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{js} \left(\frac{\partial g_{\alpha s}}{\partial x^{\beta}} + \frac{\partial g_{\beta s}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^{s}} \right). \qquad (01)$$

Бұдан ($i \neq j$ болғанда, $g_{ij} = 0$) ортогональ координаталар жүйесіндегі мәндері оңай алынады

*Кристоффель символдарын қисық сызықты координаталар жүйелеріне қолдануды меңгеру үшін Л.И. Седовтың оқулығының I томынан алынды.

$$\left.\begin{aligned} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\beta}}, \\ \Gamma^{\alpha}_{\beta\beta} &= -\frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^{\alpha}}, \quad \alpha \neq \beta, \\ \Gamma^{\alpha}_{\alpha\alpha} &= \frac{1}{2} g^{\alpha\alpha} \frac{\partial g_{\alpha\alpha}}{\partial x^{\alpha}} \end{aligned}\right\} \qquad (02\text{-}04)$$

α бойынша қосындысы болмайды

$$\alpha \neq \beta, \quad \alpha \neq \gamma, \quad \alpha \neq \gamma \quad \text{болғанда} \qquad \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0. \qquad (05)$$

$\sum\limits_{\alpha} \Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta}$ қосындысы үшін (02) формуланың көмегімен ортогональ координаталар жүйесінде келесі формулаларды алуға болады:

$$\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2g} \frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial \sqrt{g}}{\partial x^{\beta}}, \qquad (06)$$

мұндағы g – матрицаның $\left\| g_{ij} \right\|$ анықтауышы.

Кез келген координаталар жүйесіндегі (06) формуланың дәлелдемесін келтірейік. Ол үшін

$$g = \left| g_{ij} \right| = \left| \left(\vec{э}_i \cdot \vec{э}_j \right) \right| \quad \text{және} \quad \frac{\partial \vec{э}_k}{\partial x^{\beta}} = \Gamma^{\omega}_{k\beta} \vec{э}_{\omega}$$

алайық. $\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}}$ туындысын алғанда $\vec{э}_i$ және $\vec{э}_j$ екі векторының скалярлық көбейтіндісінің g детерминантының әрбір элементін дифференциалдау қажет.

$\vec{э}_i$ -дің бірінші факторын дифференциалдағанда үш детерминант алынады, оның әрқайсысының бірінші жолындағы i-ші нөмерлі мүшесі $\Gamma^{\omega}_{i\beta} g_{\omega j}$ түріндегі мүшелерімен алмастырылады. Бұл детерминанттардың әрқайсысы $\Gamma^{i}_{i\beta} g$ - ға тең екендігін оңай байқауға болады, мұндағы i- тиісті жолдың нөмеріне тең белгіленген индекс. ($\omega \neq i$ белгіленген жағдайда детерминанттар нольге тең). Үш детерминанттардың қосындысы $\sum_{i=1}^{3} \Gamma^{i}_{i\beta} g$ тең. g_{ij} симметриялығынан $\vec{Э}_i$ - дің екінші факторын дифференциалдағанда дәл осындай қосынды шығатыны анық.

Бұдан мынаны аламыз

$$\frac{\partial g}{\partial x^{\beta}} = 2g\Gamma^{i}_{i\beta},$$

бұл формулада i индексі бойынша қосылады.

Кез келген координаталар жүйесіндегі қайсы бір вектордың дивергенциясының өрнегін былай жазуға болады

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{v} = \nabla_{\alpha} v^{\alpha} &= \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + v^{\beta}\Gamma^{\alpha}_{\alpha\beta} = \\ &= \frac{\partial v^{\alpha}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{v^{\beta}}{\sqrt{g}}\frac{\partial\sqrt{g}}{\partial x^{\beta}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial v^{\alpha}\sqrt{g}}{\partial x^{\alpha}}. \end{aligned} \tag{07}$$

Кез келген қисық сызықты координаталар жүйесіндегі үзіліссіздік теңдеуінің түрі

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho v^1\sqrt{g}}{\partial x^1}+\frac{\partial\rho v^2\sqrt{g}}{\partial x^2}+\frac{\partial\rho v^3\sqrt{g}}{\partial x^3}=0. \qquad (08)$$

Ескерте кететін жәйт v –ны ковариантты $\vec{э}_\alpha$ базисының векторы бойынша жіктегендегі оның векторының компоненті v^α болып табылады, бірақ ол бірлік вектор болып есептелмейді.

Векторлар мен тензорлардың физикалық компоненттері

$\vec{v}$ жылдамдық векторы үшінде мына формуланы жазуға болады

$$\vec{v}=v^i\,\vec{э}_i=u^1\frac{\vec{э}_1}{\sqrt{g_{11}}}+u^2\frac{\vec{э}_2}{\sqrt{g_{22}}}+u^3\frac{\vec{э}_3}{\sqrt{g_{33}}}, \qquad (09)$$

мұндағы $e_i=\frac{\vec{э}_i}{\sqrt{g_{ii}}}$ - бірлік векторлар. Егер координаталар жүйесі ортогональдық болса, онда $\vec{v}$ жылдамдықтың координаталар сызығына жүргізілген жанамаға түсірілген проекциялары

$$u^i=v^i\sqrt{g_{ii}}$$

компоненттеріне тең (i –бойынша қосындысы болмайды) және **жылдамдық векторының физикалық компоненттері** деп аталады. Ортогональ координаталар жүйесі үшін $u_i=v_i\sqrt{g^{ii}}$ шамасы (i- бойынша қосындысы болмайды) енгізілген u^i физикалық компоненттеріне сәйкес келетіні анық. Осыған ұқсас кез келген вектордың физикалық компоненттерін, мысалы, үдеу $\vec{a}$ немесе grad P және кез келген рангілі тензорды енгізуге болады. Үзіліссіздік теңдеуінің физикалық компоненттерін (08) кез келген ортогональ координаталар жүйесінде пайдаланғандағы оның түрі

$$\sqrt{g}\,\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho\sqrt{g_{22}g_{33}}\,u^1}{\partial x^1}+\frac{\partial\rho\sqrt{g_{11}g_{33}}\,u^2}{\partial x^2}+$$
$$+\frac{\partial\rho\sqrt{g_{11}g_{22}}\,u^3}{\partial x^3}=0. \qquad (010)$$

Цилиндрлік және сфералық координаталар жүйесіндегі үзіліссіздік теңдеуі

Цилиндрлік координаталар жүйесі жағдайында

$$x^1=r,\qquad x^2=\varphi,\qquad x^3=z$$

$$ds^2=dr^2+r^2d\varphi^2+dz^2,$$

$$|\vec{э}_1|=1,\qquad |\vec{э}_2|=r,\qquad |\vec{э}_3|=1,$$

яғни

$$g_{11}=1,\qquad g_{22}=r^2,\qquad g_{33}=1,\qquad g_{ij}=0 \text{ егер } i\neq j.$$

Үзіліссіздік теңдеуі цилиндрлік координатада төмендегідей түрде жазылады

$$r\frac{\partial\rho}{\partial t}+\frac{\partial\rho u_r r}{\partial r}+\frac{\partial\rho u_\varphi}{\partial\varphi}+r\frac{\partial\rho u_z}{\partial z}=0.$$

Сфералық координаталар жүйесінде $x^1=r,\qquad x^2=\theta$ (полярлық бұрыш), $x^3=\lambda$ (бойлық),

$$ds^2=dr^2+r^2\,d\theta^2+r^2\,\sin^2\theta\,d\lambda^2,$$

$$g_{11}=1,\qquad g_{22}=r^2,\qquad g_{33}=r^2\sin^2\theta$$

және үзіліссіздік теңдеуінің түрі

$$r^2\sin\theta\frac{\partial\rho}{\partial t}+\sin\theta\frac{\partial\rho u_r r^2}{\partial r}+r\frac{\partial\rho u_\theta\sin\theta}{\partial\theta}+r\frac{\partial\rho u_\lambda}{\partial\lambda}=0.$$

Ортогональ координаталар жүйелеріндегі үдеудің компоненттері

Эйлердің қозғалыс теңдеуін қисық сызықты ортогональ инерциал координаталар жүйесінде жазу үшін a^j үдеу компоненттерін g_{ij} және v^i арқылы өрнектейтін формуланы аламыз. $\frac{d\vec{v}}{dt}$ үдеудің компоненттері үшін

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \nabla_i v^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + v^i \frac{\partial v^j}{dx^i} + v^i v^\beta \Gamma^j_{i\beta}.$$

(05) ескеріп, осы формуланың соңғы мүшесін түрлендірейік

$$\underset{\beta \neq j}{v^i v^\beta \Gamma^j_{i\beta}} = \underset{\beta \neq j}{2v^j v^\beta \Gamma^j_{\beta j}} + \left(v^\beta\right)^2 \Gamma^j_{\beta\beta} = \underset{j=\beta}{2v^j v^\beta \Gamma^j_{\beta j}} + \left(v^j\right)^2 \Gamma^j_{jj} + \left(v^\beta\right)^2 \Gamma^j_{\beta\beta}.$$

(j-бойынша қосындысы болмайды)

Ортогональ координаталар жүйесінде $g^{ii} = \frac{1}{g_{ii}}$ және сондықтан Кристоффель символдарын $\Gamma^j_{\alpha\beta}$ өрнектейтін (02) – (04) формулаларының көмегімен g_{ii} арқылы жазып мынаны аламыз

$$a^j = \frac{\partial v^j}{\partial t} + \frac{\partial v^j}{\partial x^i} v^i + \frac{v^j v^\beta}{g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^\beta} + \frac{1}{2} \frac{\left(v^j\right)^2}{g_{jj}} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^j} - \\ - \frac{\left(v^\beta\right)^2}{2g_{jj}} \frac{\partial g_{\beta\beta}}{\partial x^j}. \text{ (j - аркылы косындысы болмайды)} \qquad (011)$$

Бұдан, егер (09) – дағы v^i –дің орнына жылдамдықтың u^i физикалық компоненттерін ендірсек, цилиндрлік координаталар жүйесіндегі үдеудің физикалық компоненттерінің түрі

$$\left.\begin{aligned}
a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{u_\varphi^2}{r},\\
a_\varphi &= \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\varphi}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_\varphi}{\partial z} - \frac{u_r u_\varphi}{r},\\
a_z &= \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi} + u_z\frac{\partial u_z}{\partial z};
\end{aligned}\right\} \qquad (012)$$

сфералық координаталар жүйесіндегі үдеудің физикалық компоненттері төмендегідей болып жазылады:

$$\left.\begin{aligned}
a_r &= \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \lambda} - \frac{u_\theta^2 + u_\lambda^2}{r},\\
a_\theta &= \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} +\\
&+ \frac{u_r u_\theta - u_\lambda^2 \operatorname{ctg}\theta}{r},\\
a_\lambda &= \frac{\partial u_\lambda}{\partial t} + u_r\frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} + \frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} +\\
&+ \frac{u_r u_\lambda + \operatorname{ctg}\theta u_\theta u_\lambda}{r}.
\end{aligned}\right\} \qquad (013)$$

Ортогональ координаталар жүйесіндегі скалярлық функцияның градиент векторының компоненттері

Ортогональ координаталар жүйесінің осіндегі grad p векторының проекциясын анықтайық. Ол үшін

$$\text{grad}\ \ p = \frac{\partial p}{\partial x^i}\,\vec{э}^{\,i} = \left(\nabla_i p\right)\vec{э}^{\,i} = A_i\,\frac{\vec{э}^{\,i}}{\sqrt{g^{ii}}}$$

алайық. Бұдан ортогональ координаталар жүйесіндегі grad p векторының A_i физикалық компоненттері

$$A_i = \frac{\partial p}{\partial x^i}\sqrt{g^{ii}} = \frac{1}{\sqrt{g_{ii}}}\,\frac{\partial p}{\partial x^i}.$$

(i-бойынша қосынды болмайды)

Цилиндрлік координаталар жүйесіндегі grad p векторының физикалық компоненттері мынадай

$$\left.\begin{aligned} &\text{grad}\ p\Big|_r = \frac{\partial p}{\partial r},\\ &\text{grad}\ p\Big|_\varphi = \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \varphi},\\ &\text{grad}\ p\Big|_z = \frac{\partial p}{\partial z}, \end{aligned}\right\} \qquad (014)$$

ал сфералық координаталар жүйесі үшін төмендегіні аламыз

$$\left.\begin{aligned} &\operatorname{grad} p\Big|_{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \\ &\operatorname{grad} p\Big|_{\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial p}{\partial \theta}, \\ &\operatorname{grad} p\Big|_{\lambda} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda}. \end{aligned}\right\} \qquad (015)$$

Цилиндрлік және сфералық координаталар жүйелеріндегі Эйлердің теңдеулері

(012) және (014) формулаларының көмегімен Эйлер теңдеулерін цилиндрлік, ал (013) және (015) арқылы сфералық координаталар жүйесінде жазу оңай.

Цилиндрлік координаталар жүйесіндегі Эйлер теңдеулерінің түрі

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial r}u_r + \frac{u_\varphi}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + \frac{\partial u_r}{\partial z}u_z - \frac{u_\varphi^2}{r} + \frac{\partial u_r}{\partial t} = \\
&\qquad = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r}, \\
&\frac{u_r u_\varphi}{r} + \frac{\partial u_\varphi}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}u_\varphi + \frac{\partial u_\varphi}{\partial z}u_z + \\
&\qquad + \frac{\partial u_\varphi}{\partial t} = F_\varphi - \frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \varphi}, \\
&\frac{\partial u_z}{\partial r}u_r + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}u_\varphi + \frac{\partial u_z}{\partial z}u_z + \frac{\partial u_z}{\partial t} = \\
&= F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z},
\end{aligned}\right\} \qquad (016)$$

ал сфералық координаталар жүйесіндегі түрі

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\partial u_r}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_r}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta}+\frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \lambda}-\frac{u_\theta^2+u_\lambda^2}{r}=\\
&=F_r-\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r},\\
&\frac{\partial u_\theta}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\theta}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta}+\frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda}+\frac{u_r u_\theta}{r}-\\
&\qquad-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}u_\lambda^2=F_\theta-\frac{1}{r\rho}\frac{\partial p}{\partial \theta},\\
&\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}+u_r\frac{\partial u_\lambda}{\partial r}+\frac{u_\theta}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta}+\frac{u_\lambda}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}+\frac{u_r u_\lambda}{r}+\\
&\qquad+\frac{\operatorname{ctg}\theta u_\theta u_\lambda}{r}=F_\lambda-\frac{r}{\rho r\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial \lambda}.
\end{aligned}\right\}\qquad(017)$$

Ортогональ координаталар жүйесіндегі скалярлық функциядан алынған Лаплас операторы

$\vec{v}=\operatorname{grad}\Phi$ деп есептеп, кез келген ортогональ координаталар жүйесіндегі Ф скаляр функциясының Лаплас операторын (07) формуласының көмегімен оңай алуға болады

$$\text{div grad } \Phi = \nabla^2\Phi = \Delta\Phi =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{g}}\left[\frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{33}}{g_{11}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^1}\right)}{\partial x^1} + \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{33}g_{11}}{g_{22}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^2}\right)}{\partial x^2} + \right. \tag{018}$$

$$\left. + \frac{\partial\left(\sqrt{\frac{g_{22}g_{11}}{g_{33}}}\frac{\partial\Phi}{\partial x^3}\right)}{\partial x^3}\right].$$

Ендеше цилиндрлік жүйеде

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}, \tag{019}$$

ал сфералық жүйеде

$$\Delta\Phi = \frac{1}{r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\lambda^2}\right]. \tag{020}$$

Қарастырылған мысалдар жалпы формулаларды маңызды дербес жағдайларға қолдануды көрсетеді.

Цилиндрлік және сфералық координаталар жүйелеріндегі деформация жылдамдықтары тензорының компоненттері мен Навье-Стокс теңдеулері

Толығырақ қамту үшін цилиндрлік координаталар жүйесіндегі жылдамдықтар тензорының физикалық компоненттерінің өрнегін келтірейік

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \qquad 2e_{r\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi} + r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{u_\varphi}{r}\right),$$

$$e_{\varphi\varphi} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi} + \frac{u_r}{r}, \quad 2e_{\varphi z} = \frac{\partial u_\varphi}{\partial z} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_z}{\partial \varphi}, \; e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z},$$

$$2e_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z},$$

және сфералық координаталар жүйесінде

$$e_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \; e_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r},$$

$$e_{\lambda\lambda} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r},$$

$$2e_{r\theta} = \frac{1}{r}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{u_\theta}{r}, \quad 2e_{\lambda r} = \frac{\partial u_\lambda}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\lambda}{r},$$

$$2e_{\lambda\theta} = \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial \lambda} + \frac{1}{r}\frac{\partial u_\lambda}{\partial \theta} - \frac{u_\lambda \operatorname{ctg}\theta}{r},$$

сол сияқты цилиндрлік координаталар жүйесіндегі сығылмайтын сұйықтар үшін Навье-Стокс теңдеулері

$$a_r = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u_r - \frac{u_r}{r^2} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\varphi}{\partial \varphi}\right),$$

$$a_\varphi = F_\varphi - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial \varphi} + \nu\left(\Delta u_\varphi - \frac{u_\varphi}{r^2} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial \varphi}\right),$$

$$a_z = F_z - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial z} + \nu\Delta u_z \qquad \left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right),$$

және сфералық координаталар жүйесінде

$$a_r = F_r - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \nu\left(\Delta u_r - \frac{2u_r}{r^2} - \frac{2u_\theta}{r^2}\mathrm{ctg}\theta - \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} - \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_\theta}{\partial\theta}\right),$$

$$a_\theta = F_\theta - \frac{1}{\rho r}\frac{\partial p}{\partial\theta} + \nu\left(\Delta u_\theta - \frac{u_\theta}{r^2\sin^2\theta} - \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\lambda}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2}\frac{\partial u_r}{\partial\theta}\right),$$

$$a_\lambda = F_\lambda - \frac{1}{r_\theta\sin\theta}\frac{\partial p}{\partial\lambda} + \nu\left(\Delta u_\lambda - \frac{u_\lambda}{r^2\sin^2\theta} + \frac{2\cos\theta}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial u_\theta}{\partial\lambda} + \frac{2}{r^2\sin\theta}\frac{\partial u_r}{\partial\lambda}\right)$$

$$\left(\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \frac{\mathrm{ctg}\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\lambda^2}\right),$$

мұндағы үдеудің физикалық компоненттері сәйкесінше (012) және (013) формулаларымен анықталған.

Навье-Стокстің соңғы екі теңдеулер жүйелерінің алдындағы ν көбейткіштері, $\vec{v}$ жылдамдық векторына Лаплас операторын қолдану нәтижесінде алынған $\nabla^2\vec{v}$ векторының физикалық компоненттері болып табылады. Бұл өрнектерді (019) және (020) салыстырып, Лаплас операторын вектор компонентіне және скаляр функцияға қолдану, нәтижесі әртүрлі формулаларға әкелетінін көреміз.

Үш өлшемді кеңістіктегі екінші рангілі антисимметриялық тензордың аксиаль векторға эквиваленттілігі

Үш өлшемді кеңістіктегі әрбір екінші рангілі антисимметриялық тензорға $A_{ij}\,\vec{э}^i\vec{э}^j$ аксиаль вектор $\vec{B} = B^i\,\vec{э}_i$ сәйкес келеді, олардың контраварианттy компоненттері төмендегі формуламен анықталады

$$B^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}} A_{\alpha\beta}, \qquad (021)$$

мұндағы α, β, γ үш индекстердің жүйесі 1,2,3 жүйесінің дөңгелектік орын ауыстыруы арқылы алынады, ал $g = \mathrm{Det}\left\| g_{\alpha\beta} \right\|$. Бұл тұжырымдаманы дәлелдеу үшін B^{γ} шамасының x_i координаталар жүйесінен y^i жүйесіне өтетін түрлендіру формулаларын қарастырамыз. Бұл жағдайда $g_{ij}\ \vec{э}^{\,i}\vec{э}^{\,j}$ тензор компоненттері мен $A_{ij}\ \vec{э}^{\,i}\vec{э}^{\,j}$ тензор компоненттерін түрлендірудің тензорлық формулаларын, сол сияқты A_{ij} - дің антисимметриялық қасиетін қолданамыз.

g –ны анықтау үшін

$$g = \left| g_{ij} \right| = \left| g'_{kl} \right| \left\| \frac{\partial y^k}{\partial x^i} \right\| \left| \frac{\partial y^l}{\partial x^j} \right| = g' \Delta^2 ,$$

мұндағы Δ –матрицаның детерминанты $\left\| \partial y^k / \partial x^i \right\|$. Сондықтан

$$\frac{1}{\sqrt{g}} A_{ij} = \frac{1}{\sqrt{g'}} \frac{1}{|\Delta|} A'_{pq} \frac{\partial y^p}{\partial x^i} \frac{\partial y^q}{\partial x^j} = \frac{1}{\sqrt{g'}} A'_{\alpha\beta} =$$

$$= \frac{\dfrac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^{\beta}}{\partial x^j} - \dfrac{\partial y^{\beta}}{\partial x^i}\dfrac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^j}}{|\Delta|} \qquad (022)$$

(қосынды тек қана α ,β=1,2,3, α >β)

$$\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^i}\frac{\partial y^{\beta}}{\partial y^j} - \frac{\partial y^{\beta}}{\partial x^i}\frac{\partial y^{\alpha}}{\partial x^j}$$

шамалары $\left\| \partial y^i / \partial x^j \right\|$ матрицасына кері, $\dfrac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}$ матрица элементтері үшін қосымша шамалар болып табылады және сондықтан

$$\frac{1}{|\Delta|}\left[\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial y^\beta}{\partial x^j}-\frac{\partial y^\beta}{\partial x^i}\frac{\partial y^\alpha}{\partial x^j}\right]=\frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}\frac{\Delta}{|\Delta|},$$

α , β, γ және i, j, k индекстері 1,2,3 дөңгелектік орын ауыстырулар жасайды.

Сондықтан (022) формулаларын мына түрде жазуға болады

$$B^k = B'^\gamma \frac{\partial x^k}{\partial y^\gamma}\frac{\Delta}{|\Delta|}. \qquad (023)$$

Бұл формулалар $\Delta > 0$ шартында вектордың контравариантты компоненттерін түрлендіретін кәдімгі формулалармен сәйкес келеді.

Сондықтан (021) формулаларымен анықталатын вектор $\vec{B} = B^i\,\vec{э}_i$, кәдімгі полярлық вектордан өзгеше аксиаль вектор немесе псевдовектор делінеді.

Инверсияны түрлендіргенде, мысалы

$$y^i = -x^i,$$

түрлендіргенде, полярлық вектордың компоненттері $\vec{b}$ таңбасын өзгертеді

$$b'^k = b^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = -b^k,$$

ал $\vec{B}$ аксиаль вектордың компоненті (023) формуласынан көрініп тұрғандай, таңбасын өзгертпейді

$$B'^k = -B^i \frac{\partial y^k}{\partial x^i} = B^k.$$

Қисық сызықты координаталар жүйесіндегі вектордың роторын анықтау

$\vec{c} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ векторы анықтама бойынша төмендегі формулалар арқылы енгізіледі

$$\vec{c} = c^{\gamma}\ \vec{э}_{\gamma}, \quad c^{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\nabla_{\alpha}A_{\beta} - \nabla_{\beta}A_{\alpha}\right) = \frac{1}{\sqrt{g}}\left(\frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}\right)$$

(α, β, γ дөңгелектік орын ауыстырулар 1, 2, 3 жасайды).

Егер $\vec{A}$ - полярлық вектор болса, онда $\mathrm{rot}\ \vec{A}$ аксиал вектор. Декарт координаталар жүйісінде $\vec{c} = \mathrm{rot}\ \vec{A}$ векторының компоненттері мына формуламен есептеледі

$$c^{\gamma} = \frac{\partial A_{\beta}}{\partial x^{\alpha}} - \frac{\partial A_{\alpha}}{\partial x^{\beta}}$$

(α, β, γ дөңгелектік орын ауыстырулар 1, 2, 3 жасайды).